Kombinatorische Optimierungsprobleme über Touren und Bäume

ROSTISLAV STANĚK

Betreuerin:
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
ERANDA DRAGOTI-ÇELA*

Co-Betreuer:
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
ULRICH PFERSCHY†

Diese Dissertation behandelt drei Probleme.

Das Data-Arrangement-Problem in einem Baum (DAPT): Das Ziel ist es, die Knoten eines gegebenen Graphen G in den Blättern eines d-regulären Baumes T so einzubetten, dass die Summe der Abstände zwischen je zwei Blättern von T, die einer Kante in G entsprechen, minimiert wird. Das Problem wurde 2002 von LUCZAK und NOBLE eingeführt. Dieselben Autoren haben auch bewiesen, dass das Problem für alle d größer gleich 2 $\mathcal{NP}$-schwer ist.

In dieser Arbeit wird zuerst der Spezialfall behandelt, in dem beide Graphen G und T binäre reguläre Bäume sind. Es wird ein Lösungsalgorithmus präsentiert und eine geschlossene Formel angegeben, die den Zielfunktionswert des resultierenden Arrangements ermittelt. Danach wird das *k-balancierte Partitionierungsproblem* (*k-BPP*) als Hilfsproblem eingeführt und für den Spezialfall, in dem G einem regulären Binärbaum entspricht und k eine Potenz von 2 ist, gelöst. Die Lösungen von h Instanzen des k-BPP, wobei h die Höhe des Graphen G ist, führen dann zu einer unteren Schranke für den untersuchten Spezialfall des DAPT und zur $\frac{203}{200}$-Approximationsgüte des präsentierten Algorithmus. Im Weiteren wird der Approximationsalgorithmus für den Fall, in dem G und T beide d-reguläre Bäume sind, generalisiert und eine $\frac{585}{392}$-Approximationsgüte gezeigt.

Letztendlich beantworten wir eine offene Frage von LUCZAK und NOBLE durch den Beweis, dass DAPT sogar für Bäume $\mathcal{NP}$-schwer bleibt.

Das Rundreiseproblem (TSP): Die Aufgabe besteht darin, einen minimalen Hamilton-Kreis bezüglich seiner Länge in einem vollständigen gewichteten Graphen G mit nicht-negativ gewichteten Kanten zu finden. Dabei wird auf die klassischen Separationsansätze verzichtet und es wird nur mit ganzzahligen Zwischenlösungen gearbeitet.

*`cela@math.tugraz.at`. Institut für Diskrete Mathematik, Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz, Österreich

†`pferschy@uni-graz.at`. Institut für Statistik und Operations Research, Karl-Franzens-Universität Graz, Universitätsstraße 15, A-8010 Graz, Österreich

Im Prinzip werden die Subtour-Ungleichungen relaxiert und das resultierende ILP wird zur (ganzzahligen) Optimalität gelöst. In einer solchen Lösung können alle Subtouren leicht gefunden werden und jede Subtour kann durch eine Subtour-Ungleichung separiert werden. Das resultierende Modell wird dann erneut von einem ILP-Solver gelöst und der ganze Prozess wird wiederholt, bis eine optimale TSP-Lösung gefunden wird.

Wir versuchen möglichst viele der benötigten Subtour-Ungleichungen mithilfe von mehreren auf Clusterungen basierten Preprocessing-Strategien bereits vor dem ersten ILP-Solver-Durchlauf zu identifizieren. Dabei wurden sowohl empirische, als auch theoretische Ergebnisse aus der Theorie der Zufallsgraphen angewendet.

Die Minimierungs- und Maximierungsvariante des Symmetrischen Quadratischen TSP: Das *Symmetrische Quadratische Rundreiseproblem* (*SQTSP*) verwendet Kosten für Paare von zwei Kanten, die in der Tour unmittelbar nacheinander vorkommen. Wenn die Knoten Punkten in Euklidischer Ebene und die Kosten den Drehwinkeln entsprechen, erhalten wir das *Winkel-Metrische Rundreiseproblem* (*AngleTSP*).

Es stellt sich heraus, dass die einfache algorithmische Idee, die bereits für das TSP getestet wurde, für alle Testinstanzengruppen deutlich bessere Ergebnisse liefert, als der klassische aus der Literatur bekannte Ansatz, der auch bei nicht ganzzahligen Lösungen die Separation durchführt. Wir testen beide Ansätze auch mit strengeren, von Fischer und Helmberg 2013 eingeführten, Subtour-Ungleichungen.

Schließlich untersuchen wir die Maximierungsvariante *MaxSQTSP*. Im Unterschied zur Minimierungsvariante führen die strengeren Subtour-Ungleichungen von Fischer und Helmberg zur Beschleunigung des Lösungsprozesses. Für den Spezialfall *MaxAngleTSP* konnten wir eine interessante Diskrepanz beobachten: Für eine ungerade Knotenzahl kann bewiesen werden, dass die Summe der inneren Winkel in einer Optimallösung immer gleich π ist, woraus folgt, dass in diesem Fall keine Subtour-Ungleichungen in dem ILP-Modell benötigt werden. Ein polynomieller Algorithmus für diesen Spezialfall schließt dieses Kapitel ab.

Schlagwörter: Einbettung; Data-Arrangement-Problem; DAPT; Approximationsalgorithmus; Partitionierung; k-balanciertes Partitionierungsproblem; k-BPP; Problem der Partitionierung in kardinalitätsbeschränkte Mengen; PPSBC; binärer regulärer Baum; d-regulärer Baum; Rundreiseproblem; TSP; Subtour-Ungleichung; symmetrisches quadratisches Rundreiseproblem; SQTSP; maximum symmetrisches quadratisches Rundreiseproblem; MaxSQTSP; winkel-metrisches Rundreiseproblem; AngleTSP; maximum winkel-metrisches Rundreiseproblem; MaxAngleTSP; ganzzahliges quadratisches Programm; Linearisierung; MILP-Modell; ILP-Modell; ILP-Solver; Euklidischer Zufallsgraph